1

Von Zubereitung der Logarithmen

§.1 Erstlich ist zu mercken, daß die Logarith: gleicher Zahlen in zwey verschiedenen Systemen, eben das Verhältnuß gegen einander haben, wie die Logarith: jeder zwey gleicher Zahlen in diesen zwey Systemen; Es seye $a^x = b$, der Logarithmus a in einem System $= m$ in dem andern $= n$: so ist der Logarith: b im ersten System $= mx$ im anderen $= nx$, da nun $m : n = mx : nx$ so ist auch verwechselt $m : mx = n : nx$

§.2 Es seye nun m ein solcher kleiner Bruch, welcher niemahls in einer anstellenden Rechnung betrachtet zu werden verdiente (dieser etwa $\frac{1}{10^{1000}}$ dieser Bruch wird gewiß nie gebraucht), man nehme nun $\sqrt[m]{(1+m)}$ für die Basis eines Logarith: System in welchem $l(1+a) = n$ und $l(1-a) = p$ also $Log\left(\frac{1+a}{1-a}\right) = n-p$ und $L\left(\frac{1}{1-a}\right) = -p$ diese beyde Logarithmen $n-p$ und $-p$ können folgender Weise bestimmet werden. man setze $m = \frac{n}{q} = \frac{p}{r}$ da dann weilen der Quotient m so klein daß solcher Bruch fast nichts zu achten; so muß jederzeit [illegible] Theiler q und r (indeme n und p endliche Zahlen seyn sollen) so groß seyn, daß zu denselben nicht allzu große Zahlen Addirt oder von denselben nicht allzu große Zahlen Subtrahirt, als dann keine Veränderung derselben in practischen Rechnungen verursachen, und da $m = \frac{n}{q}$, ist $n = L(1+a) = qm$, da ferner $L\sqrt[m]{(1+m)} = 1$ mithin $L(1+m) = m$: ist $L(1+m)^q = qm = L(1+a)$ also ist $(1+m)^q = 1+a$ derowegen $1+m = (1+a)^{\frac{1}{q}}$ folglich $m = (1+a)^{\frac{1}{q}} - 1$ also $qm = q(1+a)^{\frac{1}{q}} - q$, ferner da $m = \frac{p}{r}$ ist $p = rm$ und $L(1+m) = m$: ist $rm = L(1+m)^r = p = L(1-a)$ mithin $(1+m)^r = 1-a$ also $1+m = (1-a)^{\frac{1}{r}}$ folglich $m = (1-a)^{\frac{1}{r}} - 1$ derowegen $p = rm = r(1-a)^{\frac{1}{r}} - r$. da nun

$$(1+a)^{\frac{1}{q}} = 1 + \frac{a}{q} - \frac{a^2 \cdot q-1}{q \cdot 2q} + \frac{a^3 \cdot q-1 \cdot 2q-1}{q \cdot 2q \cdot 3q} - \frac{a^4 \cdot q-1 \cdot 2q-1 \cdot 3q-1}{q \cdot 2q \cdot 3q \cdot 4q} \ \&c$$

das heist weilen q sehr groß also $q-1 = q$; $2q-1 = 2q$; $3q-1 = 3q$ also $\frac{q-1}{2q} = \frac{1}{2}$; $\frac{2q-1}{3q} = \frac{2}{3}$; $\frac{3q-1}{4q} = \frac{3}{4}$; das ist $(1+a)^{\frac{1}{q}} =$

2 $1+\frac{a}{q}-\frac{a^2\cdot 1}{q\cdot 2}+\frac{a^3\cdot 1\cdot 2}{q\cdot 2\cdot 3}-\frac{a^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{q\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1+\frac{a}{q}-\frac{a^2}{2q}+\frac{a^3}{3q}-\frac{a^4}{4q}$ &c

folglich $q(1+a^{\frac{1}{q}})-q = q+\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}-q =$

$L(1+a)=\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}$ &c $= n$ eben so ist $p = r(1-a)^{\frac{1}{r}}-r =$

$L(1-a)=-\frac{a}{1}-\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}-\frac{a^5}{5}$ &c $= p$ folglich ist

$L\left(\frac{1+a}{1-a}\right)=2\left(\frac{a}{1}+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\frac{a^7}{7}+\frac{a^9}{9}+++\frac{a^{2s+1}}{2s+1}\right)=n-p$

und

$L\frac{1}{1-a}=\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\frac{a^4}{4}++++\frac{a^s}{s}=-p$ in dem System darin $L^m(1+m)=1$ ist.

§.3 Setzet man nun A für die Reihe Brüche welche entweder $\log\frac{1+a}{1-a}$ oder $L\frac{1}{1-a}$ bestimmen, so ist ersterer durch 2A, und letzterer durch A aus zu drücken da denn A von a abhängt, und für jedes Logarith: System gilt, der Factor 2 im ersten, und der Factor 1 im andern Fall aber, durch welche A multiplicirt werden muss, kann immer verändert werden, (jedoch in dem Verhältnis wie 2 zu 1) nach dem die Bassis des System verändert wird, welches wir auf folgende Weise weiter suchen wollen.

§.4 Da wir oben (§.1) gesehen dass die Logarith: gleichen Zahlen zweyer verschiedenen Systemen, einerley Verhältniss gegen einander haben, so folget dass in dem System darin $L(1+m)^{\frac{2}{m}}=1$ also dass $L(1+m)^{\frac{1}{m}}=\frac{1}{2}$ ist: auch für die erste Reihe so wir oben gefunden haben, und dafür 2 A gesetzt haben $\frac{2A}{2}=A$ und der andere, dafür wir also A setzen müssen, nun aber $\frac{A}{2}$ setzen müssten, und abhängt, so oft die Bassis verändert wird auch der Factor zu A verändert werden muss so dass der Factor im dem $\log\frac{1}{1-a}$ vor zu stellen habe so viel als

als der Factor um den Log: $\frac{1+a}{1-a}$ an zu deuten, die denn die Reihe bräuche, immer einerley bleiben.

§. 5 Man setze nun als wäre $dA = L\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$ in welcher der Log: c $= e$ also $\frac{dA}{2} = Log\ \frac{1}{1-a}$ (nemlich wann man ~~man~~ im ersten fall A als die erste Reihe, und im anderen fall als die andere Reihe brauche betrachtet, so ist $\frac{dA}{e} =$ Logarit $\frac{1+a}{1-a}$ und $\frac{dA}{2e} = L\frac{1}{1-a}$ in welchen $L:c = 1$ Wann man also den Factor zu A, in einem System verlangt, in welchem die Basis c eine angegebene Zahl ist, darf man d nach belieben annehmen solche Zahl mit A Multipliciren, und den Log: c suchen ~~als hier e~~, damit d Dividiren welches dann der begehrte Factor gibt ~~im ersten fall für d~~. es seye zum beyspiel die Basis $c = 10$ (wie in den gedruckten Tabellen) man suche den Logarithmum von 2. hier setze man entweder $\frac{1+a}{1-a} = 2$ so ist wann beides seite mit $1-a$ Multipl. wird $1+a = 2-2a$ welches $a = \frac{1}{3}$ folglich

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} \ \&c$$

oder man setze $\frac{1}{1-a} = 2$ als dann wann beiderseits mit $1-a$ Multipl. wird kommt $1 = 2-2a$ also $a = \frac{1}{2}$ folgl.

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{6 \cdot 2^6} \ \&c$$

Wann man nun die ersten Reihe mit einem angenommenen Factor d Multipl. und diesen L2 heist so wird ~~mit~~ man die andere Reihe mit $\frac{d}{2}$

Multipl. Müssen um eben diesen Logarith: zu erhalten Multipl man diesen L2 mit 3 kommt $3L2 = L2^3 = L8$ ferner suche man $L\frac{5}{4}$ nemlich als wird entweder gesetzt $\frac{1+a}{1-a} = \frac{5}{4}$ also wie beides seite mit $1-a$ Multipl kommt $1+a = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}a$ also $\frac{9}{4}a = \frac{1}{4}$ welches $= \frac{1}{9}$ folgl. $A = \frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \frac{1}{9 \cdot 9^9}$ &c dieses wiederum mit dem Factor d Mult.