J. T. 1

Ew. sagten mir gestern, dass Gauss eine allgemeine Formel gefunden habe die Seiten der in einen Zirkel eingeschriebenen regulairen Polygone durch den Radius auszudrücken. Ich muss gestehen ich hatte mich mit diesem Gegenstand nie beschäftigt und konnte mich daher in keinen weitern Discours darüber einlassen. Ich habe diesen Morgen die Sache vorgenommen und sogleich folgendes gefunden, was wahrscheinlich mit Gaussens Resultat einerlei sein wird.

Wenn der Radius $= 1$, so ist die Seite des n ecks $= 2 \sin \tfrac{1}{2}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$. Man hat bekanntlich:

I) $$\sin n\varphi = \sin\varphi \left\{2^{n-1}\cdot\cos\varphi^{n-1} - (n-2)\,2^{n-3}\cdot\cos\varphi^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\,2^{n-5}\cdot\cos\varphi^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\,2^{n-7}\cdot\cos\varphi^{n-7} + \text{etc.}\right.$$

welche Reihe endlich ist und immer da abbricht, wo eine von den Zahlen im Zähler, die von n abgezogen werden, $= n$ ist. (V. Euleri Introduct. in Analys. inf. Tom I pag 198.)

Nimmt man nun an, es sei φ der Winkel, welcher dem gegebenen Polygon zukommt, so ist $n\varphi = 360^\circ$ und also $\sin n\varphi = 0$ und folglich auch dessen Werth in I. Dieser Werth besteht aus zwei Factoren, wovon also einer Null sein muss, da es aber $\sin\varphi$. als das gemeinte, nicht sein kann, so ist es die Reihe. Nennt man, der Bequemlichkeit wegen, $\cos\varphi = x$ und dividirt mit 2^{n-1}, so hat man also:

II) $$0 = x^{n-1} - \frac{n-2}{2^2}\,x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2.2^4}\,x^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3.2^6}\,x^{n-7} + \text{etc.}$$

Es kommt nun darauf an diese Gleichung aufzulösen dann hat man die Seite des Polygons $2 \sin \tfrac{1}{2}\left(\frac{360^\circ}{n}\right) = 2\sqrt{\frac{1-x}{2}}$. Es ist aber hier nicht die Aufgabe diese Gleichung allgemein aufzulösen, sondern zu versuchen ob man sie nicht auf eine vom zweiten Grade bringen kann, und dazu dient folgende Betrachtung. Bei geraden n hat die Sache keine grosse Schwierigkeit und für jedes ungerades n ist das letzte Glied $= \frac{1}{2^{n-1}}$ folglich ein Bruch dessen Nenner Potenzen von 2 sind. Da nun bekanntlich das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln ist, so dividirt man die Gleichung mit durch $x - \frac{1}{2} = 0$, oder $x - \frac{1}{4} = 0$, oder $x - \frac{1}{8} = 0$, oder $x - \frac{1}{16} = 0$ etc.+ Ist der Rest bei

+ bis $x - \frac{1}{2^n} = 0$

2 keiner dieser Divisionen Null, so ist das ein Beweis, dass die Gleichung auf keinen niedrigern Grad gebracht werden kann; ist es aber bei einer Null, so hat man die Gleichung um einen Grad niedriger gemacht und nun fängt man die vorige Operation von neuem an, bis man und sofort bis man auf eine Gleichung vom 2ten Grad kommt. Eine Gleichung vom 2ten Grad lässt sich allezeit per rectam et circulum construiren und thut also der Aufgabe Genüge. Beispiele. Es sei $n = 8$, so hat man aus II $x^7 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{8}x^3 - \frac{1}{16}x = 0$. Dividirt man mit x und setzt der Bequemlichkeit wegen, $x^2 = z$, so ist $z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{5}{8}z - \frac{1}{16} = 0$. Diese mit $z - \frac{1}{2} = 0$ dividirt wird Rest $= 0$ und man erhält $z^2 - z + \frac{1}{8} = 0$.

Es sei $n = 7$, so hat man $x^6 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{64} = 0$ oder mit z $z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{3}{8}z - \frac{1}{64} = 0$. Diese Gleichung mag man nun mit $z - \frac{1}{2}$, $z - \frac{1}{4}$, $z - \frac{1}{8}$, etc. dividiren, so wird der Rest nie Null, also kann sie nicht auf den zweiten Grad gebracht werden.

Sie sehen ein, dass diese Untersuchung bei grossen Werthen für n (z.B. 17) wegen der Divisionen sehr mühsam ist. Vielleicht hat aber Gauss, der länger über die Sache nachgedacht haben mag, hierbei noch Abkürzungen gefunden, die mir in den paar Stunden, welche ich darauf verwandt habe, entgangen sind. Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie mir bei Gelegenheit sagen wollten, ob mein Resultat mit dem des Gauss übereinstimmt und wo das letztere gedruckt ist.

Soldner

Berlin den 16 Juli 1804.