Methode der kleinsten Quadrate, angewendet auf ein Beispiel aus der Geodäsie.

1. Eine Erscheinung läßt sich durch Beobachtung finden, sie läßt sich auch aus einer Theorie a priori herleiten. Im letzteren Fall wird ihre Construction aus gewissen Hypothesen bestehen, welche wiederum auf mannigfaltige Weise mit Größen der Beobachtung combinirt sein können. Angenommen, daß diese Hypothesen u. ihre Combinationen der Wahrheit entsprechen, und sei das theoretische Ergebniß derselben $= B$; die hierauf sich beziehende Beobachtung aber, $= A$, sei fehlerfrei, so muß nothwendig sein $A - B = 0$.

2. Da, da nun B sich durch eine lineare Gleichung von nachstehender Form ausdrücken

$$B = a + bx + cy + dz + \ldots\ldots$$

und wieder angenommen, daß A gänzlich fehlerfrei ist, so können wir setzen

$$A = a + bx + cy + dz + \ldots\ldots$$

In dieser Gleichung begreifen a, b, c, d etc. data, ~~[illegible]~~ aus der Erfahrung hergenommen, u. x, y, z etc. Hypothesen der Theorie, ~~[illegible]~~ mit jenen auf eine lineare Weise combinirt. ~~[illegible]~~ Hätten wir nun in der Gleichung m Größen der letzteren Art, u. hätten wir m Beobachtungen wie A, so würden jene ~~[illegible]~~ auch dadurch gegeben sein.

3. Sei m die Anzahl der durch Beobachtung zu bestimmenden Größen u. n die Anzahl der Beobachtungen. Es sei aber $n > m$, so werden wir, bei der Voraussetzung 1, aus n Beobachtungen, die wir aus den gegebenen n auf jede mögliche Weise combiniren, stets die nämlichen m unbekannten Größen x, y, z u.s.w. erhalten. Welche m Gleichungen der obigen Art (2) wir also auch zur Bestimmung der letzteren wählen mögen, so werden die übrigen $n - m$ Gleichungen stets in jenen selbst enthalten sein.

4. Weil aber keine Beobachtung fehlerfrei ist, so wird auch die Gleichung

$$A = a + bx + cy + dz + \ldots\ldots$$

nie mehr genau sein, auch wenn x, y, z etc. vollkommen der Wahrheit entsprechende Werthe erhalten. Wir werden also in 3, für n Beobachtungen, $\frac{n.\,n-1.\,n-2\ldots\ldots n-m+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots m}$ Combinationen erhalten, von denen eine jede auf gleiche Weise zulässig ist, wenn jede der Beobachtungen gleichen Werth, d.h. dieselbe Wahrscheinlichkeit in Bezug auf die übrigen Bedingungen für sich hat. Folglich werden wir auch eben so viel verschiedene Werthe für x, y, z, u.s.w. erhalten.

5. Da nun x, y, z etc. nicht mehrere, sondern nur einen Werth haben können; da aus n Beobachtungen von vermuthlicher gleicher Genauigkeit, nicht blos eine, sondern jede mögliche Combination von m derselben Anspruch, jenen Werth zu bestimmen haben; da für den wahren Werth von x, y, z u.s.w. und die fehlerfreien Beobachtungen der Unterschied zwischen jedem A u. jedem $a+bx+cy+$ ——— Null sein muß, so folgt, daß für n Gleichungen

$$A = a + bx + cy + ———$$

derjenige Werth von x, y, z u.s.w. der wahrscheinlichste sein wird, welcher aus allen Combinationen hergeleitet, den Unterschied zwischen A u. $a+bx+cy+ \ldots$ für jede der gegebenen Gleichungen so nahe an Null, als möglich, macht. Mit andern Worten: derjenige Werth ist der wahrscheinlichste, der den n Beobachtungen von vermuthlicher gleicher Genauigkeit auf eine solche Weise entspricht, daß die Fehler derselben ein Kleinstes werden.

6. Die Fehler der Beobachtungen können in ihrer Beziehung auf einander positiv oder negativ sein. Denn sind die negativen Fehler kleiner als die positiven u. umgekehrt. Der wahrscheinlichste Werth der x, y, u.s.w. (5) aber verlangt, daß die Fehler der Beobachtungen überhaupt u. als absolute Größen, ein Kleinstes werden. Mithin müssten die Quadrate dieser Fehler ein Kleinstes sein; denn alsdann ist jeder Fehler, er sei positiv oder negativ, ein Kleinstes.

7. Seien nun, für m unbestimmte Größen x, y, z ..., n Beobachtungen u. daraus gebildete Gleichungen von umstehender Form gegeben:

$$A - a - bx - cy - \ldots\ldots = E$$
$$A' - a' - b'x - c'y - \ldots\ldots = E'$$
$$A'' - a'' - b''x - c''y - \ldots\ldots = E''$$
$$\text{u. s. w.}$$

A, A', A'' u.s.w. sind die Beobachtungen, a, a', a''... b, b', b''... u.s.w. sind Bestimmungsstücke, welche die Beobachtung begleiten u. sich nach den bestehenden Fällen abändern, jedesmal aber mit ihr gegeben werden. x, y, z u.s.w. werden hier als die bereits ausgemittelten wahrscheinlichsten Werthe dieser Größen betrachtet; und E, E', E'' u.s.w. sind die Unterschiede zwischen Beobachtung und Theorie. Wären diese letzteren sämmtlich $= 0$, so hätten die angenommenen Werthe von x, y, z u.s.w. für diese Anzahl von Beobachtungen Gewißheit. Wir nehmen aber an, daß dies nicht der Fall, sondern die E, E', E'' einzeln [illegible] gesetzlichen oder negativen Werthe haben; denn sind sie Fehler der Beobachtung; und es ist die Aufgabe:

die x, y, z u.s.w. so zu bestimmen, daß E^2, E'^2, E''^2 u.s.w., weil sie, da sie nicht sich von einander als unabhängig betrachtet werden an sich, die Summe dieser Quadrate ein Kleinstes werde.

8. Auflösung: Aus obigen Gleichungen folgt

$$A^2+A'^2+A''^2+\dots+(a^2+a'^2+a''^2+\dots)+(b^2+b'^2+b''^2+\dots)x^2$$
$$+(c^2+c'^2+c''^2+\dots)y^2+\dots-2(Aa+A'a'+A''a''+\dots)$$
$$-2(Ab+A'b'+\dots)x \text{ u.s.w.} = E^2+E'^2+E''^2+\dots$$

oder, wenn wir $A-a$, $A'-a'$ u.s.w. $= D$, D' u.s.w. setzen und zur Abkürzung die Summenzeichen brauchen,

$$\int D^2+x^2\int b^2+y^2\int c^2+\dots$$
$$-2\{x\int Db+y\int Dc+z\int Dd+\dots\}$$
$$+2\{xy\int bc+xz\int bd+\dots\}$$
$$+2\{yz\int cd+\dots\}$$
$$\text{u.s.w.} = \int E^2.$$

In dieser Gleichung sind E und x, y, z u.s.w. variabel. Soll nun $\int E^2$ ein Kleinstes werden, so bekommen wir nach den Regeln der Differenzial-Rechnung folgende Bedingungsgleichungen:

$$x\int b^2-\int Db+y\int bc+z\int bd+\text{etc} = 0$$
$$y\int c^2-\int Dc+x\int bc+z\int cd+\text{etc} = 0$$
$$z\int d^2-\int Dd+x\int bd+y\int cd+\text{etc} = 0.$$

und es ist klar, daß wir eben so viel derartige Bedingungsgleichungen erhalten, als es zu bestimmende Größen giebt, deren Sicherheit man bestimmen kann. Dadurch aber wird der Aufgabe genügt: denn für die so erhaltenen Werthe von x, y, z u.s.w. ist $\int E^2$ ein Kleinstes (der Fall des maximums muß hier der Natur der Sache wegen ausgeschlossen werden). Ferner bemerke man, zur Ermittelung dieses Kleinsten sämmtliche der gegebenen Gleichungen auf eine gleiche Weise.

49. Anwendung

Sei α die gegebene geographische Breite eines Punktes auf der Oberfläche der Erde, so läßt sich die Länge des daselbst gemessenen Meridiangrades (wenn nämlich α die Mitte des zu messenden Meridianbogens bezeichnet) in dieser Form darstellen: $x + y\sin\alpha^2$; wo x und y Functionen der Abplattung und der Länge des Halbmessers des Äquators in der Maßeinheit, in welcher die Länge des Meridiangrades bestimmt werden soll.

Sei nun ferner Δs die wirklich gemessene Länge eines Meridiangrades, so haben wir für n unter den Breiten $\alpha, \alpha', \alpha''$ u. s. w. angestellte Messungen die Gleichungen

$$\Delta s - x - y\sin\alpha^2 = \varepsilon$$
$$\Delta s' - x - y\sin\alpha'^2 = \varepsilon'$$
$$\Delta s'' - x - y\sin\alpha''^2 = \varepsilon''$$

u. s. w.

Also wird die Gleichungen in n. 7 verglichen ist

$$A - a = \Delta s;\quad b = 1;\quad c = \sin\alpha^2;\quad d = 0,\quad e = 0 \text{ u. s. w.}$$

Wir erhalten folglich aus 8 die Bedingungsgleichungen

$$n x - \int\Delta s + y\int\sin\alpha^2 = 0$$
$$y\int\sin\alpha^4 - \int\Delta s.\sin\alpha^2 + x\int\sin\alpha^2 = 0$$

daraus

$$x = \frac{\int\Delta s\int\sin\alpha^4 - \int\Delta s\sin\alpha^2\int\sin\alpha^2}{n\int\sin\alpha^4 - \left[\int\sin\alpha^2\right]^2}$$

$$y = \frac{n\int\Delta s.\sin\alpha^2 - \int\Delta s\int\sin\alpha^2}{n\int\sin\alpha^4 - \left[\int\sin\alpha^2\right]^2}$$

Vergleicht man nun die drei Messungen von Bouguer bei Quito, von Delambre in Frankreich und von Svanberg in Lappland, so habe ich $\alpha = 1^\circ\ 31'\ 0''45$; $\alpha' = 46^\circ\ 11'\ 54''$; $\alpha'' = 66^\circ\ 20'\ 10''$, und folgendes Tableau

	Δs	$\sin\alpha^2$	$\sin\alpha^4$
I.	110614 mètres 20.	0,0007005	0,0000004
II.	111131 m 60	0,5209085	0,2713450
III.	111469 m 11	0,8389017	0,7037559

$\int\Delta s = 333214^m\,91$ $\int\sin\alpha^2 = 1{,}3605107$; $\int\sin\alpha^4 = 0{,}9751013$

ferner

$$\int\Delta s\sin\alpha^2 = 151478^m,43$$
$$\int\Delta s.\int\sin\alpha^2 = 453342^m,217$$
$$n\int\Delta s.\sin\alpha^2 = 454435^m,29$$
$$\int\Delta s\sin\alpha^2\int\sin\alpha^2 = 206087^m,918$$
$$n\int\Delta s\int\sin\alpha^4 = 324917^m\,855$$
$$\left[\int\sin\alpha^2\right]^2 = 1{,}8509874$$
$$n\int\sin\alpha^4 = 2{,}9253039$$

daraus

Daraus bekomme ich

$$x = \frac{118829,940}{1,0743165}\ ; \quad y = \frac{1093,08}{1,0743165}$$

Wenn wir aber die große u. die kleine halbe Achse des Erdsphäroids a u. b nennen u. setzen $\frac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon^2$, wenn wir ferner die zwei unter den Breiten α u. α' gemessenen Grade ΔS, $\Delta S'$ setzen $\frac{\Delta S'}{\Delta S} = p$, so ist bekanntlich (siehe Klügels Wörterbuch)

$$p^{\frac{2}{3}} = \frac{1-\varepsilon^2 \sin\alpha^2}{1-\varepsilon^2 \sin\alpha'^2}$$ daraus, welches

$$\varepsilon^2 = \frac{p^{\frac{2}{3}}-1}{p^{\frac{2}{3}} \sin\alpha'^2 - \sin\alpha^2}$$

Setzen wir $\alpha = 0$ u. $\alpha' = 90°$, so wird daraus

$$\varepsilon^2 = \frac{p^{\frac{2}{3}}-1}{p^{\frac{2}{3}}}.$$

Nun ist allgemein sehr nahe

$$\Delta S = x + y \sin\alpha^2;$$ dies giebt für $\alpha = 0$

$$\Delta S = x;$$ für $\alpha' = 90°$

$$\Delta S' = x + y;$$ also

$$\varepsilon^2 = \frac{\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{\left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Substituiren wir die obigen Werthe von x u. y, so ist

$$\frac{x+y}{x} = \frac{119923,02}{118829,94}\ ; \quad \left(\frac{x+y}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,006124$$

welches

$$\varepsilon^2 = \frac{6124}{1006124} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

also $1-\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{1000000}{1006124}$, woraus folgt

$$\frac{b}{a} = 0,996951.$$

Die Abplattung aber ist $= \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 0,003049$

dies giebt $= \frac{1}{327,9}$. Es ist also die wahrscheinlichste Abplattung aus den drei genannten Messungen $= \frac{1}{327,9}$.

Setze ich aber in die obigen drei Gleichungen

$$\Delta S - x - y \sin\alpha^2 = E$$

die gegebenen ΔS u. die oben gefundenen Werthe von x u. y, so erhalte ich

$$E = +3^m,2$$
$$E' = -9^m,11$$
$$E'' = +4^m,11$$

Dies

6. und also sind die wesentlichsten Fehler jener drei Methoden, daß man den Fuß jeden andern angenommenen Winkel für 3 u. 4 zöllige Schienen herausbekommen : dieses ist die einzige Abweichung derjenigen, von welchen die genannten drei Methoden am meisten abweichen.

Sapienti sat.

Ich bitte um Entschuldigung, wegen der Eile, womit ich diesen Aufsatz, ohne Zeichnung, abgefaßt habe.

Wohlau

den 19 Mai 1822.