1

1778 gab Herr Davison zu Danzig heraus:

Tentamen demonstrationis asserti: aequationem tertii gradus, methodo Tschirnhausii resolutam tres habere posse radices imaginarias. in 4° 8 Seiten, die Gl. selbst die er auflöst ist $x^3+6x^2+9x+1=0$, er löst sie nach de la grange memoires de l'Ac. de Berlin 1770 auf

---

(neue) Methode alle mittleren Glieder aus einer gegebenen Gl. hinwegzuschaffen, von D. Ehrenfried Walther von Tschirnhausen. acta Erud: 1683. p. 204

~~auf d. geometrie des des Cartesius ist~~ Cartesius hat schon in seiner Geometrie gezeigt, wie man aus einer gegebenen Gl. das 2 Glied hinwegschaffen kann. So viel ich aber weiss ist ~~der~~ den analytischen bis jetzt der Kunstgriff noch unbekannt, ~~[illegible]~~ mehrere Glieder ~~[illegible]~~ ~~gesetz~~ aus zu schaffen ~~werden sollen~~; ja einige halten die aufhebung übriger in dieser aufsätze vor-sigar für unmöglich. Ich habe mir dieses in diesem aufsatze vor genommen, ~~[illegible]~~ die Mittel hierzu anzugeben; aber freilich nur für diejenigen, die denen die analisis schon ziemlich geläufig ist, indem nur diese sich mit blossen Resultaten begnügen können. Ich befehle mir aber vor, wenn es gefordert werden sollte, die Sache weiter auszuführen. Man bemerke also

1°. Es sei die kubische Gl. $x^3-px^2+qx-r=0$ gegeben, ~~wo~~ x die in allgemeinen die Wurzeln derselben u. p, q, r bekannte Grössen ~~vorstellen~~ bezeichnen. Will man nun das 2te Glied hinwegschaffen, so setze $x=y+a$. Durch diese Substitution erhält man eine neue Gl. in y

$$\begin{aligned} &y^3+3ay^2+3a^2y+y^3 \\ &\quad -py^2-2pay-pa^2 \\ &\quad +qy+qa \\ &\quad -r \end{aligned} = 0$$

Um nun das zweite Glied hinwegzuschaffen, setze man $3ay^2-py^2=0$. Dadurch wird $a=\frac{p}{3}$; d. h. man muss, um aus einer kubischen Gl. das 2te Glied hinwegzuschaffen, so wie wir gethan $x=y+a$, sondern

2

$x = y + \frac{p}{3}$ setzen. Dies ist schon allgemein bekannt, und ich führe hier nur ~~dasselbe an~~ zum bessern Verständniß des folgenden an.

Sollen demzufolge aus einer Gl 2 Glieder hinweggeschafft werden, so nehme ich die Gl $x^2 = bx + y + a$, für drei, die Gl $x^3 = cx^2 + bx + y + a$, für 4, $x^4 = dx^3 + cx^2 + bx + dy + a$ u. s. w. an. Zum Unterschied von der gegebenen Gl, will ich diese die angenommene Gl (aequationes assumtas) nennen. Man sieht leicht worauf es hier ankommt. Denn so wie ich durch die Gl $x = y + a$ nur ein Glied ausschaffen kann, indem hier nur die eine unbestimmte Größe a vorhanden ist, eben so ~~kann~~ lassen sich durch die Gl $x^2 = bx + y + a$, die die 2 unbestimmten ~~Gl~~ Größen a, u b enthält, auch nur 2 Glieder hinwegschaffen; ~~und~~ so durch die Gl $x^3 = cx^2 + bx + y + a$ nur drei, weil a, b, c ~~aber~~ unbestimmt sind u, so in allen Fällen. Damit man aber das Verfahren durch ein Beispiel genauer kennen lerne, will ich zeigen, wie durch die angenommene Gl $x^2 = bx + y + a$ wirklich zwei Glieder ausgeschaltet werden; denn da die Methode überall ~~die ähnliche~~ ist, so wird schon daraus zu Genüge erhellen, wie man in jedem andern Falle verfahren müsse. Es sei daher ~~[illegible]~~

3^{o} die cubische Gl $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ gegeben aus der man die beiden mittleren Glieder hinwegschaffen soll. ~~[illegible]~~ Schaltet man das 2te Glied aus (weshalb hier wirklich zu thun nicht nöthig ist, und nur zu unnützer Weitläufigkeit führen würde): so erhält man eine Gl unter der Formel $y^3 - qy - r = 0$. Nun sei

die sogenannte angenommene Gl $y^2 = by + z + a$
aus dieser beide Gl entsteht nach bekannten al-
gebraischen Vorschrift, eine dritte Gl, in z

$$
\begin{array}{l}
z^3 + 3az^2 + 3a^2z + a^3 \\
\quad -2q \quad -4qa \quad -2qa^2 \\
\quad \cancel{q} \quad +q^2 \quad +q^2a \\
\qquad\quad -qb^2 \quad -qb^2a \\
\qquad\quad +3rb \quad +3rba \\
\qquad\qquad\qquad -r^2 \\
\qquad\qquad\qquad -qrb \\
\qquad\qquad\qquad +rb^3
\end{array}
$$

um nun die mittleren ~~das 2 3 Glied~~ gerade aus dieser Gl ausschalten zu können, setzt man das 2. 3. Glied $= 0$. dadurch erhält man zur Bestimmung der beiden Größen a, b die 2 Gl

$3az^2 - 2qz^2 = 0$ u. $3a^2z - 4qaz + q^2z - qb^2z$
$+ 3rbz = 0$, die erste gibt $a = \frac{2q}{3}$
und diesen Werth von a in die zweite gesetzt
gibt $b = \frac{3}{q} \times \left(\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}\right)$. setzt
man nun in der Gl $y^2 = by + z + a$, anstatt
a u. b, die so eben gefundenen Werthe der-
selben, so werden dort ~~in~~ aus einer kubischen
Gl zwei gleiche Einzelgestalt werden,
oder welches auf das nämliche hinausläuft,
~~es~~ es lässt sich durch die angenommene
Gl $y^2 = by + z + a$ jede kubische Gl in eine
andere verwandeln, in der die zwei mittleren
Glieder fehlen — ~~...~~
~~auf~~ um drei, 4, 5. C Glieder aus zu
erhalten, ist das Verfahren das nämliche,
denn da ich vermöge der angenommenen
Gl, die gegebene stets in eine andere
Gl von dem nämlichen Grade verwandelt
werden kann, so können in dieser neuen

(nicht leicht zu übersehen ist)

Gl stets, 3, 4, 5 C Glieder $= 0$

gesetzt werden, aber dadurch bekommen wir allemal so viel Gl. als unbestimmte Größen vorhanden sind, und die durch diese Gl. bestimmt werden können.

4. Es lassen sich hier ebenfalls ~~solche~~ ähnliche Formeln angeben, als Cartesius für die Ausschaltung des 2ten Gliedes angegeben. Denn so wie er in ~~dieser~~ seiner Formel $x = y + a$ für quadratische Gl. $a = \frac{p}{2}$, für kubische $a = \frac{p}{3}$ setzen muss, eben so befunden ist, müssen wenn er aus einer kubischen Gl. $x^3 + qx + r = 0$ zwei Glieder vermöge der angenommenen $x^2 = bx + y + a$ ausschalten will, $a = -\frac{2q}{3}$ und $b = \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{\frac{9r^2}{4q^2} + \frac{q}{3}})$, in einer vom 4ten Grade $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$,

$a = -\frac{2q}{4}$, und $b = \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{(\frac{9r^3}{4q^2} + \frac{2q}{4} - \frac{2s}{9})}$

in der Gl. $x^5 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, $a = -\frac{2q}{5}$

und $b = \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{\frac{9r^2}{4q^2} + \frac{3q}{5} - \frac{2s}{9}})$, endlich in einer Gl. vom 6ten Grade $x^6 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$, $a = -\frac{2q}{6}$ und b $\frac{3r}{2q} \pm \sqrt{(\frac{9r^2}{4q^2} + \frac{4q}{6} - \frac{2s}{9})}$ gesetzt werden. Und so ins unendliche fort, das aber jeder, der daran Gefallen findet, leicht so weit ausführen kann als er will.

5. Welche Fortschritte die Analysis dadurch machen müssen und wie groß der Nutzen dieser Regel sei, wird jedem geübten Analysten leicht einfallen. Ich will mich bloß mit der Anmerkung begnügen, daß dadurch eine Methode angegeben wird, ~~die ...~~ alle Wurzeln einer Gl. jeglichen Grades zu finden. Ein Beispiel mag dieses erläutern

A'

Ein