Lehrsatz 1. Wenn $x+y=2a$, und $x \lessgtr y$, so ist $\frac{a^2}{\cancel{4}} > xy$.

Beweiß Es sei $x = a+m$ und $y = a-m$, so ist $xy = a^2 - m^2 < a^2$

Lehrsatz 2 wenn $x+y+z = 3a$, und die größen x, y, z nicht gleich sind, so ist $xyz < a^3$.

Beweiß 1. Fall. Es ist $x = a$, $y = a+m$, $z = a-m$ so ist $yz < a^2$ (Lehrs. 1) folglich $xyz < a^3$.

2. Fall Es sei $x = a \pm p$, $y = a \mp p \pm m$, $z = a \mp m$, so ist $xy = a^2 - p^2 + am - pm$ und $xyz = a^3 + (m-a)p^2 + mp(m-a)$ nun muß, wenn x, y und z positiv sind, $a > m$ sein, folglich $m - a = -r$, daher $xyz = a^3 - rp^2 - mrp = a^3 - rp(p+m) < a^3$

3 Fall

Beweiß Hier giebt es drei Fälle. ~~E~~ entweder einer der Factoren etwa x ist $= a$ und die übrigen sind ~~verschieden~~ kleiner oder größer als a; oder es ist x größer als a und y u. z sind zugleich kleiner als a; oder endlich es ist x kleiner als a und y u. z sind zugleich größer als a.

1 Fall es sei $x = a$, $y = a+m$, $z = a-m$, so ist $yz < a^2$ (Lehrs. 1) folg. $x \cdot (yz) = a \cdot yz < a \cdot a^2 = a^3$.

2. Fall. es sei $x = a+p$, $y = a+m$, $z = a-r$. so daß x u. y größer, z aber kleiner a sei. ~~Nun~~
Folglich $xyz = a^3 + a^2(m+p-r) + a(pm - pr - mr) - rmp$.
Nun aber ist $m+p-r = 0$, ~~also xy~~ weil $x+y+z = 3a$ sein soll, also $xyz = a^3 + a(pm - pr - mr) - rmp$. aber weil $m+p-r=0$, ist $m+p = r$ und $mr + rp = r^2$ also $xyz = a^3 + a(pm - r^2) - rmp$. Es ist aber weil $p+m = r$, $pm < \frac{r^2}{4}$ (Lehrs. 1) folglich pm auch kleiner als r^2; daher $pm - r^2 = -q$ und $xyz = a^3 - aq - rmp < a^3$.

3 Fall. Es sei $x = a - p$, $y = a - m$, $z = a + r$. so daß x u. y kleiner aber z größer sei als a. So ist $xyz = a^3 + a^2(r - m - p) + a(pm - rp - rm) - rmp$. wo sich eben so wie (Fall 2) erweisen läßt daß $xyz < a^3$ sein müße.

Ähnliche beweise zeigen, ~~daß~~ wenn $x+y+z+t = 4a$ sind daß $xyzt < a^4$ und überhaupt, wenn ~~a+b~~ eine ~~Summe~~ Menge von ~~Theilen~~ n ungleichen Theilen $o+p+q+r+s$ etc $= na$ ist, daß das Product aller kleiner sei als a^n.

Lehr Satz 3. Wenn in einer Gleichung vom grade n in der die Zeichen von + u. − abwechseln, dasjenige glied wo x^0 vorkömmt größer ist als der n^{te} theil des Coefficienten vom Gliede x^{n-1} auf die Potenz n erhoben, so enthält die Gleichung unmögliche Wurzeln

Beweis. Da die Zeichen in der Gleichung abwechseln, so enthält sie lautere positive Wurzeln, ~~folglich kann~~ folglich kann aus (Lehrs. 1 & 2) das Product aller nicht größer sein, als die Summa aller getheilt durch die Anzahl aller ~~aus~~ und auf die Potenz der Gleichung erhoben oder wenn a die Summa aller und p das Product aller bedeutet so ~~darf~~ muß ~~p~~ $p < \left(\frac{a}{n}\right)^n$ sein. Nun aber ist das glied worinn x^0 vorkömmt das Product aller Wurzeln, folglich $= p$, aber der Coefficient des Gliedes x^{n-1} die Summe derselben $= a$. folglich darf dieses Glied nicht größer sein als ~~gedachte Coefficient~~ der n^{te} Theil des gedachten Coefficienten auf die Potenz n erhoben. Fordert dieses die aufgabe dennoch, so fordert sie was unmögliches, und die Gleichung hat unmögliche Wurzeln.