Lehrsatz 1. In jeder Quadratischen Gleichung $x^2-ax+b=0$ sind die rationalen Wurzeln, wann sie deren hat, unter der Formel $\frac{4m^2-2m-b}{4m-(1+a)}$ enthalten; und zwar wird x von m folgender gestalt abhängen.

wann $x=1$ oder 2, so wird $m=1$
. . . $x=3$ . . . 4 . . . . . . $m=2$
$x=5$ . . . 6 . . . . . . $m=3$
$x=2n-1$ . . . $2n$ . . . . . . $m=n$

Beispiel Es sei $x^2-8x+12=0$. Hier ist $x=2$, also $m=1$ und $4m^2-2m-b=4-2-12=-10$. Aber

$4m-(1+a)=4-1-8=-5$ also

$$\frac{4m^2-2m-b}{4m-(1+a)}=\frac{-10}{-5}=+2.$$

Beweis. Man mache folgende folgende Reihen

a^0 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22.
b^0 −5, 2, 9. 16 23. 30. 37. 44
c^0 −19, −8 3, 14, 25. 36 47. 58.
d^0 −41. −26 −11, 4, 19 34 49. 64

Diese Reihe sind so beschaffen, daß ~~[illegible]~~ in jeder Reihe ~~[illegible]~~ das $2m-1$' und $2m$' glied, die Quadrate der Zahlen $2m-1$ und $2m$ sind. Nun suche man die terminos generales dieser Reihen. So ist der terminus generalis für die Reihe $a^0=3x-2$

. . . . . . $b^0=7x-12$
. . . . . . $c^0=11x-30$
. . . . . . $d^0=15x-56$ also

für die Reihe $m^0=(4m-1)x+2m-4m^2$

Da nun jede dieser Reihen 2 Quadrate hat, so ist der terminus generalis für die Reihe ~~[illegible]~~, ein allgemeiner ausdruck für jegliches ~~[illegible]~~ Paar von Quadraten unter der Form $(2m-1)^2$, und $(2m)^2$. Folglich für alle mögliche Quadrate, oder jedes x^2 wird ausgedrückt werden können, $(4m-1)x + 2m - 4m^2$; und zwar mit der Bedingung, daß $m=1$ wenn $x=1$ oder 2

$m=2$ — $x=3$ oder 4

$m=n$ ... $x=2n-1$ .. $2n$.

Setzt man nun diesen Werth von x^2 in $x^2-ax+b=0$ so verwandelt sich dieselbe in

$$(4m-(1+a))x + 2m - 4m^2 + b = 0$$

folglich ist $x = \dfrac{4m^2-2m-b}{4m-(1+a)}$ W. Z. E. W.

Zus. 1 Man mache $2m = y + \frac{1}{2}$, so ist

$$\begin{aligned} 4m^2 &= y^2 + y + \tfrac{1}{4} \\ -2m &= -y - \tfrac{1}{2} \\ -b &= -b \end{aligned}$$ also

$$4m^2-2m-b = y^2 - \tfrac{1}{4} - b$$ und

$$\begin{aligned} 4m &= 2y+1 \\ -1 &= -1 \\ -a &= -a \end{aligned}$$ also

$$4m-(1+a) = 2y-a$$ folglich

$$x = \frac{4m^2-2m-b}{4m-(1+a)} = \frac{y^2-\frac{1}{4}-b}{2y-a} = \frac{4y^2-1-4b}{4(2y-a)}$$

Zus. 2 Es sei $2y=p$, so wird $x = \dfrac{p^2-1-4b}{4(p-a)}$

Zus. 3 Da $2m = y+\frac{1}{2}$, so ist $y = 2m-\frac{1}{2} = \frac{p}{2}$ also $p = 4m-1$. folglich wird in der letzten Formel p von x folgender weise abhängen

wenn $x = 1$ oder 2, so ist $p = 3$

$x = 3$ ... 4 ... $p = 7$

$x = 5$ ... 6 ... $p = 11$

$x = 2n-1$ ... $2n$ ... $p = 4n-1$.

Lehrsatz 2. Eine rationale Wurzel einer Cubischen Gleichung $x^3-ax^2+bx-c=0$ ist 3
unter der Formel

$$\frac{16m^3-4m^2(3+a)+2m(1+a)+c}{12m^2-2m(3+2a)+(1+a+b)}$$

enthalten; wo x von m wie in Lehrs: 1 abhängt.

Beispiel. Es sei $x^3-8x^2+16x-8=0$ hier ist $x=2$
also $m=1$; daher $16m^3-4m^2(3+a)+2m(1+a)+c=-2$
und $12m^2-2m(3+2a)+(1+a+b)=-1$

folglich $x=\frac{-2}{-1}=+2$.

Beweis man mache hier wieder folgende Reihen

a', 1. 8, 15. 22. 29. 36. 43. 50 57. 64.
b°, -47, -10, 27, 64. 101. 138. 175, 212, 249, 286,
c°, -339, -148, -57, 34, 125, 216, 307, 398, 489, 580.
d°, -671. -502, -333, -164, 5, 174, 343, 512, 681, 850.
e° -1439, -1168, -897, -626, -355, -84, 187, 458, 729, 1000

In diesen Reihen ist hier wiederum immer das $2m-1$te
und $2m$te Glied der Cubus von $2m-1$ u. $2m$.
hier bedeutet nemlich nach und nach die erste, die
2te Reihe etc. | nun ist

der terminus generalis der Reihe $a' = 7x-6$
- - - - - - - - - - $b' = 37x-84$
- - - - - - - - - - $c' = 91x-330$
- - - - - - - - - - $d' = 169x-840$
- - - - - - - - - - $e' = 271x-1710$

~~folglich für die Reihe m~~

~~$(12m^2-6m+1)x-16m^3$~~

folglich für die Reihe $m=(12m^2-6m+1)x-16m^3+12m^2-2m$

Der Terminus generalis für die Reihe m ist aber (wie aus Lehrsatz 1 erhellet) ein terminus generalis für alle Kubikzahlen; oder jede

$x^3 = (12m^2 - 6m + 1)x - 16m^3 + 12m^2 - 2m$, wo m von x hier wiederum so wie bey den Quadratzahlen abhängt, daß wenn $x = 1$ oder 2, so ist $m = 1$

$x = 3 \ldots 4 \ldots m = 2$

$x = 2n-1 \ldots 2n \ldots m = n$

Setzt man diesen Werth von x^3, und den oben in Lehrsatz 1 gefundenen von x^2 in die Gleichung

$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ so wird.

$$\begin{aligned}
&(12m^2 - 6m + 1)x - 16m^3 + 12m^2 - 2m \\
&-(4am - a)x + 4am^2 - 2am \\
&+bx - c = 0
\end{aligned}$$

oder $(12m^2 - (6+4a)m + (1+a+b))x - 16m^3 + (12+4a)m^2 - (2+2a)m - c = 0$

und $x = \dfrac{16m^3 - 4m^2(3+a) + 2m(1+a) + c}{12m^2 - 2m(3+2a) + (1+a+b)}$ W. z. e. W.

Zus. Durch ein ähnliches Verfahren findet man

$x^4 = (32m^3 - 24m^2 + 8m - 1)x - 48m^4 + 48m^3 - 16m^2 + 2m$

und $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d$ in

$32m^3 - 12m^2(2+a) + 2m(4+3a+2b) - (1+a+b+c)x - 48m^4 + 16m^3(3+a) - 4m^2(4+3a+b) + 2m(1+a+b) + d$

verwandelt. Folglich

$$x = \frac{48m^4 - 16m^3(3+a) + 4m^2(4+3a+b) - 2m(1+a+b) - d}{32m^3 - 12m^2(2+a) + 2m(4+3a+2b) - (1+a+b+c)}$$