Lehrsatz. Eine Gl. vom dritten Grade ~~die~~ $y^3 - ay^2 + by - c = 0$
die zwei gleiche Wurzeln enthält, kann ~~keine~~ weder Imaginäre
noch Irrationale Wurzeln enthalten.

Beweiß. Da a die Summe der Wurzeln, b die Summe ihrer ~~des Produkts~~ je zwei u. zwei genommen
und c das Produkt aller drei Wurzeln ist, so setze man
$2x + y = a$, $x^2 + 2xy = b$, und $x^2y = c$. Da man Gl.
wo alle Wurzeln verschieden sind, mag man aus den
gegebenen partiallen Gleichungen, ~~[illegible]~~ welche unbekannte
Größe man will suchen, so wird man immer eine Haupt
Gl. finden, die unter der Form $y^3 - ay^2 + by - c = 0$ enthalten
+ gelöst werden könnte ist. Diese Gl. wird denn drei Werthe haben, und also wann sie durch = + sowohl
zur Findung von y als der übrigen Größen dienen. Sucht
man aber aus den partiellen Gleichungen ~~die b~~ x zu elimi=
niren, so erhält man obige Gl. unter der gewöhnlichen
Form. Da sie aber auch den Werth von x angeben muß
so wird diese Wurzel, wann sie auf einem Weg gefunden werden
kann, ein Divisor für die Gl. $y^3 - ay^2 + by - c = 0$ abgeben.
Nun kann ~~der~~ der Werth von x, und durch eine Gl. vom
ersten Grade gefunden werden. Folglich ist x, ~~wieder~~ oder
(welches gleich viel ist) die zwei gleichen Werthe von y weder
Imaginär noch Irrational. Nun aber hat eine Gl.
vom 3ten Grade entweder 2 Imaginäre oder gar keine
Imaginäre Wurzel. Da nun 2 ~~nicht Imaginär~~ reel
sind, so muß es auch die 3te seyn. Aber sie kann auch
nicht Irrational seyn, weil sonst die Coefficienten ð
ganze Zahlen seyn könnten.

Es wird aber x oder die beiden ~~Gl.~~ gleichen Werthe von y
folgender Gestalt gefunden.

Da $x^2y = c$, $x^2 + 2xy = b$ und $2x + y = a$, so ist

$y = \frac{c}{x^2} = \frac{b - x^2}{2x} = a - 2x$ daher

$2cx = bx^2 - x^4$ oder $x^3 - bx + 2c = 0$ ferner

$c = ax^2 - 2x^3$ oder $x^3 - \frac{a}{2}x^2 + \frac{c}{2} = 0$ folglich

$\frac{a}{2}x^2 - bx + \frac{3c}{2} = 0$ und

$x^2 - \frac{2bx}{a} + \frac{3c}{a} = 0$

ARC 4° 792/A5.21

~~folg~~ $x^2 - \frac{2b}{a}x + \frac{3c}{a} = 0$. Es ist aber auch $b - x^2 = 2ax - 4x^2$

$x^2 - \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3} = 0$ und oder $3x^2 - 2ax + b = 0$

$$\left(\frac{2a}{3} - \frac{2b}{a}\right)x + \frac{3c}{a} - \frac{b}{3} = 0$$ oder

$$(2a^2 - 6b)x = ab - 9c$$, folglich

$$x = \frac{ab - 9c}{2a^2 - 6b}$$ eine rationale Größe.

~~Zus. 1.~~ Beyspiel. Es sei $y^3 - 7y^2 + 16y - 12$ eine Gl. die zwei gleiche Wurzeln hat. So ist

$a = 7$, $b = 16$, $c = 12$. also

$ab = 7 \times 16 = 112$	$2a^2 = 98$
$9c = 9 \times 12 = 108$	$6b = 96$
$ab - 9c = 4$	$2a^2 - 6b = 2$. folglich

$x = \frac{4}{2} = 2$. welches einer ~~der~~ der gleichen Werthe der Gl. ist.

Zus: 1. Da $x = \frac{ab - 9c}{2a^2 - 6b}$ und $x^2 - \frac{2a}{3}x + \frac{b}{3} = 0$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$$, so wird

folglich

$$\frac{ab - 9c}{2a^2 - 6b} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 3b}}{3}$$ welches Formel

$$c = \frac{9ab - 2a^3 \mp (2a^2 - 6b)\sqrt{(a^2 - 3b)}}{27}$$

also ein Merkmal abgiebt ob die Gleichung 2 gleiche Werthe hat.

Zus. 2 Da $3x^2 - 2ax + b = 0$ ist aber eben dieselbe des Differenzial der Gleichung im Falle des maximi ist, so sieht man, daß auch dieses ein Merkmal abgiebt, ob die Gl. zwei gleiche Werthe habe. Man differentiire sie wirklich und sehe ob dieses diff. durch dx getheilt und $=0$ gesetzt ~~er~~ einen rationalen Werth für x giebt, Lehrs. 2 ~~Es~~ Sind in einer Gl. vom 4° Grade

$$y^4 - ay^3 + by^2 - cy + d = 0$$

3 Wurzeln gleich, also $3x + y = a$

$$3x^2 + 3xy = b$$

$$x^3 + 3x^2y = c \qquad \text{v. s. 17}$$

$$x^3y = d$$

wenn man die Rechnung nach oben gezeigter Art anstellt $x = \dfrac{(18a^2 - 64b)d + abc}{9a^2c - 24bc}$