1 Wann in der Gl $x^3-ax^2+bx-c=0$, $(a^2+2a+1)c=b^2+2bc+c^2$, so lässt sich sie sich in $(x^2-(a-\sqrt{c})x+\sqrt{c})(x-\sqrt{c})$ zerlegen.

Der leichteste Fall ist wann $a=b=c=1$

ein anderer Fall wann, $a=b$, und $c=1$

allgemein folgt dieses daraus

weil $(a^2+2a+1)c=b^2+2bc+c^2$ immer Quadrate, und alle coeffic: ganze Zahlen seyn sollen, so muss $c=\partial^2$ seyn, und $(a+1)^2\partial^2=(b+c)^2=(b+\partial^2)^2$, daher $(a+1)\partial=b+\partial^2$ oder $\partial^2-(a+1)\partial-b=0$ folglich $\partial=\frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-4b}}{2}$

Wann in der Gl $x^3-ax^2+bx-c=0$, $c=(a-1)(b-a+1)$ lässt sie sich in ~~[illegible]~~ $(x^2-x+1+b-a)(x-a+1)$ zerlegen.

wann daher $b=0$, ist $c=-(a-1)^2$

Wann in der Gl x^3-ax^2+bx-c, $c=\frac{a\pm\sqrt{(a^2-4(1-b)}}{2}$, lässt sie sich in $(x^2-(a-c)x+1)(x-c)$ zerlegen. Hier kann c niemals imaginär werden.

Wann $b=\frac{9a^3+64c}{48}$ lässt sich $x^3-ax^2+bx-c=0$, in ~~[illegible]~~ $(x^2-\frac{1}{4}ax+\frac{4c}{3a})(x-3/4a)$ zerlegen.

x^3-ax^2+bx-c

Die Auflösung ist folgender Art angestellt worden. Ich setze $(x^2-xy+p)(x-z)=$

so ist $y+z=a$, $yz+p=b$, und $pz=c$. dies giebt für y die Gl

$y^3-2ay^2+(a^2+b)y-ab+c=0$ und für z, $z^3-az^2+bz-c=0$

2 Es ist aber $y = a - z$ und daher $y^3 = a^3 - 3a^2z + 3az^2 - z^3$.
Stellt man nun für y^3 und z^3 die gefundenen werthe
so erhält man
$2ay^2 - a^2y + by + ab = 2az^2 - 3a^2z + bz + a^3$, da aber $y = a - z$
wird $2ay^2 - a^2y = 2az^2 - 3a^2z + a^3$ oder $y^2 - \frac{ay}{2} = z^2 - \frac{3az}{2} + \frac{a^2}{2}$
oder zu beyden $\frac{a}{16}$ hinzugesetzt $(y - \frac{1}{4}a)^2 = (z - \frac{3}{4}a)^2$ folglich
$y - z = -\frac{1}{2}a$. Aber $y + z = a$, folglich $y = \frac{1}{4}a$ und $z = 3/4a$
daraus $\beta = \frac{4c}{3a}$ und $b = \frac{9a^3 + 64c}{48}$.
Ist $b = 0$, so ist $a^3 : 64 = -c : 9$. Wenn daher $a^3 = 64n$ und $c = 9n$
so wird die Zerlegung stets möglich. ~~Wenn daß~~ Soll nun a eine ratio-
~~Beyspiel $x^3 - 20x + 45 = (x^2 - 5x + 3)(x + 15)$~~ nale Zahl seyn, so
muß $n = q^3$, folglich $a = 4q$ und $c = -9q^3$ seyn
Beyspiel $x^3 - 4x + 9 = (x^2 - x + 3)(x - 3)$
$x^3 - 8x + 72 = (x^2 - 2x - 12)(x - 6)$
Wenn $b = 1$, wird $48 = 9a^3 + 64c$, oder $9a^3 = 48 - 64c$
und $\frac{a^3}{8} = \frac{6 - 8c}{9}$ daher $\frac{a}{2} = \sqrt[3]{\left(\frac{6-8c}{9}\right)}$ Soll nun a eine
ganze rationale Zahl seyn, so muß $\frac{6 - 8c}{9} = t^3$. oder
$6 = 9t^3 + 8c$ seyn, welches in ganzen Zahlen unmöglich ist
Ist $a = 0$, so muß $3b = 4c$ seyn, wenn die Zerlegung statt finden soll.

Wenn $2b^3 = \frac{c^2}{4}$, läßt sich $x^3 - bx + c = 0$ in ~~$(x^2 - bx + c)$~~
$(x^2 - \frac{c}{b}x + b)(x + \frac{c}{b})$ zerlegen. Die Rechnung ist auf folgende
Weise angestellt worden. Es sey $x^3 - bx + c = (x^2 - xy + \beta)(x + y)$

3

$$x^2 - xy + p$$
$$x + y$$
$$x^3 - x^2y + xp$$
$$+x^2y - xy^2 + yp$$
$$x^3 - bx + c = 0$$

$$p - y^2 = b,\ yp = c$$
$$p = b + y^2 = \frac{c}{y},\quad y^3 + by - c = 0,\ p^3 - bp^2 - c^2 = 0$$
$$y^2 = p - b,\quad y = \frac{c}{p},\ y^2 = \frac{c^2}{p^2},\ c^2 = p^3 - bp^2$$

$$y^6 = p^3 - 3bp^2 + 3b^2p - b^3 = b^2y^2 - 2bcy + c^2$$

$$b^2y^2 - 2bcy + c^2 = \cancel{3p^2b + 3pb^2 - b}\ bp^2 + c^2 - 3bp^2 + 3b^2p - b^3$$

$$b^2y^2 - 2bcy = -2bp^2 + 3b^2p - b^2,\quad y = \frac{c}{p},\ y^2 = \frac{c^2}{p^2}$$
$$\frac{bc^2}{p^2} - \frac{2c^2}{p} = -2p^2 + 3bp - b^2$$

$$2p^4 - 3bp^3 + b^2p^2 - 2c^2p + bc^2 = 0$$

$$p^4 - \frac{3bp^3}{2} + \frac{b^2p^2}{2} - c^2p + \frac{bc^2}{2} = 0$$
$$+\frac{3bp^3}{2} - \frac{3b^2p^2}{2} \qquad - \frac{3bc^2}{2} = 0$$

$$p^4 - b^2p^2 - c^2p - bc^2 = 0 = \left(p^2(p+b) - c^2\right) p - b =$$

$$(p^3 + bp^2 - c^2)(p - b)$$
$$(p^3 - bp^2 - c^2)(p - b)$$

$$-b + \frac{c^2}{b^2} = b$$

$$2bp^2(p-b) = 2bp^3 - 2b^2p^2 = p - b = 0$$
$$p = -b \quad y = -\frac{c}{b} \qquad \cancel{b - \frac{c^2}{b^2} = b},\ \cancel{b^3 - c^2 = b}$$
$$2b$$

$$y = \frac{c}{-b}$$

$$-b - \frac{c^2}{b^2} = b$$
$$2b = -\frac{c^2}{b^2}$$
$$2b^3 = -c^2$$

$$x^2 - \frac{c}{b}x + b$$
$$x + \frac{c}{b}$$
$$x^3 - \frac{c}{b}x^2 + bx$$
$$-\frac{c^2}{b^2}x + c$$
$$+\frac{c}{b}x^2$$
$$x^3 + \frac{b^3 - c^2}{b^2}x + c$$

$$b = b + y^2$$

$$p^3 + bp^2 - c^2 \quad \frac{3bp^3}{2} -$$
$$p = -b$$

$$p^2(p^2 - b^2) - c^2(p + b)$$
$$(p^2(p - b) - c^2)(p + b)$$
$$p^3 - bp^2 - c^2$$

4

$$x^2 - xp + v$$
$$x - z$$
$$x^3 - x^2 p + xv$$
$$\quad - x^2 z + xpz - zv$$
$$x^3 - ax^2 + bx - c$$

$$p + z = a$$
$$pz + v = b$$
$$zv = c$$

$$z = a - p = \frac{b - v}{p} = \frac{c}{v}$$

$$av - vp = c, \quad b - v = ap - p^2, \quad v = \frac{c}{a-p} = b - ap + p^2$$

$$c = ab - a^2 p + ap^2 - bp + ap^2 - p^3$$

$$p^3 - 2ap^2 + (a^2 + b)p - ab + c = 0$$
$$z^3 - az^2 + bz - c = 0$$

$$p = a - z$$
$$p^3 = a^3 - 3a^2 z + 3az^2 - z^3$$

$$2ap^2 - (a^2 + b)p + ab - \cancel{c} = a^3 - 3a^2 z + 3az^2 - az^2 + bz - \cancel{c}$$

$$\cancel{2a(p^2 - z^2)} - (a^2 + b)(p - z) \cancel{- (2a^2 - 2b)z}$$

$$2ap^2 - (a^2 + b)p + ab = a^3 \cancel{- a^2 z - 2a^2 z + 2az^2 - bz + 2bz =}$$

$$\cancel{2az^2 - (a^2 + b)z - 2(a^2 - b)z + a^3} \quad 2az^2 - (3a^2 - b)z + a^3$$

$$2a(p^2 - z^2) - (a^2 + b)(p - z) + 2(a^2 - b)z = a^3 - ab, \quad p = a - z$$

$$2a(p^2 - z^2) - (a^2 + b)(p - z) + 2(a^2 - b)z = a^3 - ab$$

$$2a(p + z)(p - z) - (a^2 + b)(p - z) + 2(a^2 - b)z = a^3 - ab$$

$$2a^2(p - z) - (a^2 + b)(p - z) + 2(a^2 - b)z = a^3 - ab$$

$$2a^2(a - 2z) - (a^2 + b)(a - 2z) + 2(a^2 - b)z = a^3 - ab$$

$$2a^3 - 4a^2 z - a^3 + 2a^2 z - ab + 2bz + 2a^2 z - 2bz$$

$$p^2 = a^2 - 2az + z^2$$

$$2a^3 - 2a^2 z + 2az^2 - a^3 + a^2 z - ab + bz + ab = 2az^2$$