1 Aufgabe. Die Bedingung zu finden unter der $P+Q = QR+S$ wann nehmlich $QS = a$ einer ganzen Zahl?

Auflösung. Da $P+Q = QR + SP$ so ist

$P - SP = QR - Q$ oder $P(1-S) = Q(R-1)$ folglich

$\frac{P}{Q} = \frac{R-1}{1-S}$. Man setze

$P = n(R-1) = nR - n$ und

$Q = n(1-S) = n - nS$; so wird

$Q + nS = n$ da aber

$QS = a$; so ist

$nS^2 - nS + a = 0$ oder $S^2 - S + \frac{a}{n} = 0$, und

$$S = \frac{1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{4a}{n}\right)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{\left(\frac{n-4a}{n}\right)}}{2}.$$

Um nun die grösse unter dem Wurzelzeichen rational zu erhalten, setze man $\sqrt{\left(\frac{n-4a}{n}\right)} = \frac{2p}{n^2}$. Soll aber $\sqrt{\left(\frac{n-4a}{n}\right)}$ rational sein, so muß n ein Quadrat sein; man mache daher $n = 4h^2$, und $\sqrt{(n-4a)} = 2p$, so wird

$n - 4a = 4p^2 = 4h^2 - 4a$. folglich

$4a = 4h^2 - 4p^2$, oder $a = h^2 - p^2 = (h+p)(h-p)$

~~Dadurch wird~~ $\cancel{S = 1 \pm \frac{2p}{2h^2} = 1 \pm \frac{p}{2h^2} = \frac{2h^2 \pm p}{2h^2}}$

~~und~~ $\cancel{Q = \frac{a}{S} = \frac{h^2 - p^2}{\frac{2h^2 \pm p}{2h^2}} = \frac{2h^2(h^2-p^2)}{2h^2 \pm p}}$

Dadurch wird $S = \frac{1 \pm \frac{2p}{2h}}{2} = \frac{1 \pm \frac{p}{h}}{2} = \frac{h \pm p}{2h}$

und $Q = \frac{a}{S} = \frac{2ah}{h \pm p} = \frac{2(h+p)(h-p)h}{h \pm p}$

Man mag sich daher des Zeichens + oder − in $h \pm p$ bedienen, so wird ~~Der~~ im Ausdrucke für Q sich immer ein Faktor heben lassen und es wird sein entweder

$Q = 2(h+p)h$, oder

$Q = 2(h-p)h$ also $Q = 2h(h \pm p) =$

$\frac{4h^2}{2h}(h \mp p) = 4h^2\left(1 \text{[illegible]} \frac{(h \mp p)}{2h}\right) =$

$n(1-S)$.

Nun

Nun Q und S gefunden worden, kann R nach belieben angenommen und dadurch $P.$ bestimt werden. Q. E. F.

Beispiel. Es sei $n = 4h^2 = 16$, $p = 1$ folglich $a = h^2 - p^2 = 3.$, so wird

$$S = \cancel{r}\,\frac{1 \pm \sqrt{\frac{n-4a}{n}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 \pm 1}{4}$$

$$Q = \frac{a}{S} = \frac{3 \cdot 4}{2 \pm 1}$$

1° man setze erst $S = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$ so wird

$$Q = \frac{12}{3} = 4$$

und nehme $R = 2$ so wird

$$P = n(R-1) = 16 \text{ und}$$

~~$P + Q =$~~

$$P + Q = 16 + 4 = 20 = QR + SP =$$

$$4 \times 2 + 3/4 \times 16 = 8 + 12 = 20$$

2° man setze zweitens $S = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ so wird

$$Q = \frac{12}{1} = 12$$

man nehme $R = 2$ so wird

$$P = n(R-1) = 16 \text{ und}$$

$$P + Q = 16 + 12 = 28 = QR + SP =$$

$$12 \times 2 + \tfrac{1}{4} \times 16 = 24 + 4 = 28.$$

~~p~~ $p + r = qr + sp, \quad q + s + pr = a + 1, \quad qs = a$

$p - sp = qr - r$

~~p~~

$p(1-s) = r(q-1)$

$\frac{p}{r} = \frac{q-1}{1-s}$

$p = s(q-1) = qs - s = a - s$

$r = s(1-s) = s - s^2$

$p = n(q-1)$

$r = n(1-s)$

$pr = n^2(q - 1 - \overset{a}{qs} + s$

$q + s + n^2 q - n^2 - an^2 + n^2 s = a + 1$

$q(1+n^2) + s(1+n^2) = a + 1 + n^2 + an^2 \quad a(1+n^2) + 1(1+n^2)$

$q + s = a + 1$

$q + s = a + 1$

$qs = a$

~~$q = a$~~

$q^2 + qs = aq + q$

$q^2 = aq + q - a$

$q^2 - (a+1)q + a = 0$

$q = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1 - 4a}}{2}$

$q = \frac{a + 1 \pm \sqrt{a^2 - 2a + 1}}{2}$

$q = \frac{a + 1 + a - 1}{2} = a$

$s = 1$

$r = 0$

$p =$ [illegible]$(a-1)$

$p = sp.$

4

$p + r = \frac{c}{b} = \partial$

$qr + sp = \frac{c}{b} = \partial$

$qs = a$

$q + s + pr = a + 1$

$q + s - pr = m$

$q + s = \frac{m + a + 1}{2}$

$pr = \frac{m - a - 1}{2}$

$qs = a$

$q + s = a + 1 - pr$

$q + s - 1 = a - pr$

$\partial(q + s - 1) = \partial(a - pr) = qp + rs$

$\cancel{pq} + ps - p + qr + \cancel{sr} - s = \cancel{qp + rs}$

$\overset{\partial}{\cancel{ps + qr}} = p + s$

$\partial = p + r$

$r + s = 0$

$s = -r$

$$\boxed{\begin{array}{l} pr = \frac{m - a - 1}{2} \\ p + r = \frac{c}{b} = \partial \end{array}}$$

$qs = a$

$q + s = \frac{m + a + 1}{2}$

$p^2 - \overset{\partial}{\cancel{\tfrac{c}{b}}}\, p + \frac{m - a - 1}{2} = 0$

$p = \frac{\partial + \sqrt{(\partial^2 - 2m + 2a + 2)}}{2}$

$r = \frac{\partial - \sqrt{(\partial^2 - 2m + 2a + 2)}}{2}$

$q^2 \cancel{+} \frac{(m + a + 1)}{2} q + a = 0$

$q = \frac{m + a + 1 + \sqrt{m^2 + 2am + a^2 + 2m \overset{14}{\cancel{+2a}} + \cancel{1}}}{\cancel{2}4}$

$s = \frac{m + a + 1 - \sqrt{m^2 + 2am + a^2 + 2m - 14a + 1)}}{4}$

$qr =$

$q + s + pr = a + 1$

$p + r = d$

$\cancel{pq + ps + p^2r = ap + p}$

$pq \cancel{+ ps} + p^2r + \cancel{qr} + sr + pr^2 = ad \cancel{+ \partial}$

$pq + p^2r + sr + pr^2 = ad$

$\frac{pq + sr + p^2r + pr^2}{qs} = \cancel{a}\partial$

$qp + rs = \partial(a - pr)$

$\frac{p}{s} + \frac{r}{q} + \frac{p^2r + pr^2}{a} = \partial$

$\frac{p}{s} + \frac{r}{q} + (p + r)\frac{pr}{a} = \partial$

$\frac{qp + rs}{a}$

$\frac{p}{s} + \frac{r}{q} = \partial - \frac{\partial}{a} pr = \cancel{ad}\ \frac{\partial(a - pr)}{a}$