Aufgabe

Es sei die Summe dreier größen, ihr Product, und die Summe der Producte je zwei und zwei gegeben, die größen selber zu finden;

Auflösung. Es sei $x+y+z=a$, $xy+xz+yz=b$, $xyz=c$

man setze $y+z=p$, $yz=q$. so ist

$x+p=a$
$xp+q=b$ und ~~nach~~ nach der gewöhnlichen aequation $x^3-ax^2+bx-c=0$
$xq=c$

Es ist aber $x=a-p=\frac{b-q}{p}=\frac{c}{q}$. folglich $a-p=\frac{c}{q}$ und $p=\frac{aq-c}{q}$

~~und~~ aber $\frac{b-q}{p}=\frac{c}{q}$ also $p=\frac{bq-q^2}{c}$

daher $\frac{aq-c}{q}=\frac{bq-q^2}{c}$ und

$acq-c^2=bq^2-q^3$ oder $q^3-bq^2+acq=c^2$. Nun aber ist

$x^3-ax^2+bx=c$ also $cx^3-acx^2+bcx=c^2$. folglich

$q^3-bq^2+acq=cx^3-acx^2+bcx$; oder $\frac{q^3}{c}-\frac{bq^2}{c}+\frac{acq}{c}=x^3-ax^2+bx$

aber weil $xq=c$, so ist $\frac{q}{c}=\frac{1}{x}$, daher

$\frac{q^3}{c}-\frac{bq^2}{c}+\frac{acq}{c}=\frac{q^2}{x}-\frac{bq}{x}+\frac{ac}{x}=x^3-ax^2+bx$. aber daher

$q^2-bq+ac=x^4-ax^3+bx^2$. Setzen wir nun zu beiden

Seiten der gleichung $-cx$ hinzu, so wird

$q^2-bq+ac-cx=x^4-ax^3+bx^2-cx=x(x^3-ax^2+bx-c)$

Da aber $x(x^3-ax^2+bx-c)=0$ sein muß, da deren ein Factor

$x^3-ax^2+bx-c=0$ ist, so ist auch $q^2-bq+ac-cx=0$

oder $\frac{q^2-bq+ac}{c}=x$†. diese gleichung differentiirt

giebt $\frac{2qdq-bdq}{c}=dx$ und $\frac{dx}{dq}=\frac{2q-b}{c}$.

Es ist aber $xq=c$, folglich $xdq+qdx=0$; oder $xdq=-qdx$, und

$\frac{dx}{dq}=\frac{-x}{q}=\frac{2q-b}{c}$, also $-x=\frac{2q^2-bq}{c}$, da aber

$x=\frac{q^2-bq+ac}{c}$ gefunden worden,

so ist, wenn man beide gleichungen addirt $0=2q^2-bq+q^2-bq+ac$

oder $3q^2-2bq+ac=0$ folglich $q^2-\frac{2}{3}bq+\frac{ac}{3}=0$

und $q=\frac{1}{3}b\pm\frac{\sqrt{b^2-3ac}}{3}$, also $x=\frac{c}{q}=\frac{3c}{b\pm\sqrt{b^2-3ac}}$

† kürzer $ac=x^2q+xpq$, $q-b=-xp$, und $q(q-b)=-xpq$, also

$ac+q(q-b)=ac+q^2-qb=x^2q+xpq-xpq=x^2q=xc$