~~Extrait~~ Auszug

aus d. reflexions sur la resolution algebrique des equations par M. de la grange.
N. Me: de Berlin 1770. p. 134.

§1. Eine Gleichung vom 3ten grade
$x^3+mx^2+nx+p=0$, lässt sich immer auf
$x^3+nx+p=0$ zurückbringen, und diese
haben Scipio ferreo und Tartalea aufgelöst.
Nach dem Vortrage des Hudde kann man so verfahren.
Es sei $x=y+z$. So wird, wenn man diesen Werth
von x in die vorgegebene Gl. setzt

$$y^3+z^3+p+(z+y)(3yz+n)=0$$ nun setze man
$$y^3+z^3+p=0$$ und
$$3yz+n=0$$, so wird $z=-\frac{n}{3y}$, und dadurch
$$y^6+py^3-\frac{n^3}{27}=0$$ woraus
$$y=\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}+\frac{n^3}{27}\right)}\right)}$$. Ist also y durch die Coeff: und z durch y gegeben, so ist auch x gegeben.

§2. Diese Gleich: scheint 6 Wurzeln zu haben, weil man zu ihrer Auflösung eine vom 6ten Grade braucht. aber da sie doch eigentlich doch nur vom 3ten Grade ist, so müssen immer 2 Wurzeln gleich sein. Setzt man wirklich in $y^6+py^3-\frac{n^3}{27}=0$, $x=y-\frac{n}{3y}$ so kommt man auf $(x^3+nx+p)^2=0$, woraus man sieht, daß die Gleich: 2 wirklich aufgelöst wird, [illegible] die Solvens mit dem Quadrate der Solvendae einerlei sei.

2 §3. Die 3 verschiedenen Werthe von y oder x lassen sich so finden. Es seien $1.\ \alpha.\ \beta$ die drei Wurzeln von $y^3-1=0$. So werden (wenn $\frac{p^2}{4}+\frac{n^3}{27}=q$ gesetzt wird) die Wurzeln von $y^3+\frac{p}{2}\mp\sqrt{q}=0$, oder von $y^3-1\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)=0$

sein
$$y=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)}$$
$$y=\alpha\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)}$$
$$y=\beta\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)}$$
und weil $z=-\frac{n}{3y}$

aber $-\frac{n}{3}=\sqrt[3]{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}=\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)}\right)\left(\sqrt[3]{-\frac{p}{2}\mp\sqrt{q}}\right)$, also

$$\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}=\frac{-n}{3\sqrt[3]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q}}}=\frac{-n}{3y}=z$$

so wird
$$z=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}$$
$$z=\frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}$$
$$z=\frac{1}{\beta}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}.$$
nun aber ist

$\alpha\beta=1$. folglich werden (sein) die drei Werthe von
$$z=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}$$
$$z=\beta\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}$$
$$z=\alpha\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}$$
also (weil $x=y+z$)

wird
$$x=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}$$
$$x=\alpha\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)}+\beta\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}\right)}$$
$$x=\beta\sqrt[3]{\left(-\tfrac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)}+\alpha\sqrt[3]{-\tfrac{p}{2}\mp\sqrt{q}}$$

welche Werthe von x die im Grunde nur drei verschiedenen sind. Woraus erhellet aber zugleich, daß man sowohl $+$ als $-\sqrt{q}$ nehmen kann; und daß ~~man~~ die Wurzeln der gegebenen Gleich. alle unter der Formel $\sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q}\right)}$ enthalten sein werden

3 (N3) §4. Ob die Wurzel $x = \sqrt[3]{\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{q}\right)} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} \mp \sqrt{q}}$

aus einer Gl. vom 6ten grade gefunden werde, so würde, wann man durch cubiren die Wurzelzeichen wegschaffen wollte, das doch auf eine gleich. vom 9ten grade führen und zwar auf $x^9 + 3px^6 + (3p^2 + n^3)x^3 + p^3 = 0$

diese Gl. (conult [?] de la g.) enthält aber die Werthe von $x^3 + \alpha n x + p = 0$ u. $x^3 + \beta \alpha x + p = 0$, noch außer der gegebenen $x^3 + nx + p = 0$, und folglich müste sie 9 werthe haben (?) woraus aber nichts weiter auf gleich. vom 3ten grade überhaupt zu schließen sei (?)

§5 Bis jetzt hat man gesehen, wie die wurzeln der gegebenen $x^3 + nx + p = 0$ von der reducirten dann $y^6 + py^3 - \frac{n^3}{27}$ abhängen. Um nun auch zu wissen, wie y von den

Wurzeln ~~coef.~~ der haupt Gl. abhänge, so seien, a, b, c die drei Wurzeln von $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, die man in $x^3 + n'x + p' = 0$ verwandelt hat. Darum sei $y + s = x$, so wird, wie wir wissen y durch eine Gl. vom 6ten grade gefunden, und drei werthe haben. heißt einer dieser Werthe r, so heißen die beiden übrigen αr, und βr, und s wird $= \frac{n'}{3r}$. daraus ergibt sich, wann erst die werthe von y, dann von x' und dann von $x = x' - \frac{m}{3}$ sucht

$$a = -\frac{m}{3} + r - s$$
$$b = -\frac{m}{3} + \alpha r - \frac{s}{\alpha}$$
$$c = -\frac{m}{3} + \beta r - \frac{s}{\beta}$$

Sorgfältige Rechnung giebt $r = \frac{a}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha b}{(\alpha-1)(\alpha-\beta)} + \frac{\beta c}{(\beta-1)(\beta-\alpha)}$

nun aber ist $x^3 - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$, daraus giebt das Differential (wie darf das hier gebraucht werden?) $3x^2 = (x-\alpha)(x-\beta) + (x-1)(x-\beta) + (x-1)(x-\alpha)$

folglich wird, wann man ~~x~~ variable annimt und es auch

4 nach, 1, α, β bedeuten läßt

$3 = (1-\alpha)(1-\beta)$, $3\alpha^2 = (\alpha-1)(\alpha-\beta)$, $3\beta^2 = (\beta-1)(\beta-\alpha)$

wodurch $x = \frac{a}{3} + \frac{b}{3\alpha} + \frac{c}{3\beta} = \frac{a+\beta b+\alpha c}{3}$ $(\alpha\beta = 1)$

$= y = \frac{a+\alpha b+\beta c}{3}$, weil dadurch nichts geändert wird.

§ 6. Hier hängt der Werth von y nicht unmittelbar von a, b, und c
sondern von m, n, p ab; so oft also a, b, c ~~verändert~~
combiniert werden können, ohne d. Werth zu ~~ver~~ändern,
eben so viele Werthe muß auch y haben; folglich muß
die reduzierte Gl. eine Gl. vom 6ten grade sein.
Aber man sieht auch sogleich, daß sie auf eine Gl. vom 2ten grade
wieder reduziert werden können. Denn