de formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio A. L. Eulero. Commentarii Petro. T. VI p. 216.

§3. Nimt man an, daß die Wurzel von $x^3 = ax + b$ sei $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ so braucht man nur die Quad: $z^2 = \alpha z - \beta$ aufzulösen um A u. B zu finden. denn es ist $x^3 - ax - b = x^3 - 3x\sqrt[3]{AB} - (A+B)$ also $a = 3\sqrt[3]{AB}$, $b = A+B$, $\frac{a^3}{27} = AB = \beta$, $A+B = b = \beta$.

§4 $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ enthält alle 3 Wurzeln der Cubischen Gl. weil $\sqrt[3]{A}$ sowohl als $\sqrt[3]{B}$ drei Werthe hat

§5. Für die biquadratische $x^4 = ax^2 + bx + c$, sei $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ~~so wird $x^4 = ax + bx$~~ $A + B + C = \alpha$, $AB + AC + BC = \beta$, $ABC = \gamma$, um A, B, C zu finden braucht man also nur $z^3 - \alpha z^2 + \beta z - \gamma$ aufzulösen

Es ist aber weil $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$

$x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4\beta + 8x\sqrt{\gamma}$ dieses mit
$x^4 - ax^2 = +bx + c$ verglichen giebt
$\alpha = \frac{a}{2}$, $8\sqrt{\gamma} = b$, $\cancel{\gamma}$ $\gamma = \frac{b^2}{64}$, $4\beta = c + \alpha^2 = c + \frac{a^2}{4}$ ∴ $\beta = \frac{4c+a^2}{16}$ folglich sind A, B, C Wurzeln der Gl. $z^3 - \frac{a}{2}z^2 + \left(\frac{4c+a^2}{16}\right)z - \frac{b^2}{64} = 0$ sein

§6 Setzt man $\cancel{x}$ $z = \sqrt{t}$ so kömmt man d. dergestalt Quad: auf

$$t^3 = \left(\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2}\right)t^2 + \left(\frac{ab^2}{64} - \frac{c^2}{16} - \frac{a^2c}{32} - \frac{a^4}{256}\right)t + \frac{b^4}{4096}$$

wären nun die ~~Wurzeln~~ Werthe von ~~$z = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$~~ A, B, C, und sind die von t; E, F, G. so wäre $A = \sqrt{E}$, $B = \sqrt{F}$, $C = \sqrt{G}$, also $\sqrt{A} = \sqrt[4]{E}$ etc

also $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$.

2 §7. die Gl in z die um einen grad niedriger als die gegebene ist, nennt Euler aequationem resolventem wenn jene, die gegebene, aequatio resolvenda heißt.

§8. Muthmaßt er daß jede resolvenda $x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4}$ etc eine resolvens $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4}$ etc haben, deren Wurzeln A, B, C, D etc sind, so daß $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$ etc sei

§9. Zur Bestätigung dieser Muthmaßung dienen die ~~Moivresche~~ Moivreschen Gl in den ~~tracta~~ transactio n 309. ~~kann~~ man kann nemlich $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}$ auflösen, weil diese Gl sich ~~in~~ durch die division z^{n-3} in $z^2 = \alpha z - \beta$ verwandeln läßt. Sind nun A, u B die Wurzeln dieser Gl, so daß $A+B=\alpha$, $AB=\beta$ so wird sie im allgemeinen als aequatio resolvens von

$$x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-6}\sqrt[n]{\beta^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-8}\sqrt[n]{\beta^4} - \text{etc} = \alpha$$

Es ist nemlich $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$.

§10. Dieser Gl Wurzeln, sind außer $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, noch $x = m\sqrt[n]{A} + n\sqrt[n]{B}$ wenn $mn = m^n = n^n = 1$, d.h. m und n müßen die Wurzeln von $x^n - 1$ sein. Wäre $n = 7$. so würde man nur alle Wurzeln von $x^7 - 1 = 0$ zu finden die Gl $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ auflösen müßen aber diese sowohl als $x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ setzen nur die auflösung einer Gl vom 3ten grade voraus +

+ oder aber kanst, wenn sie vom grade 2n wären die auflösung vom grade n.

§11. In solchen Gleichungen kann man nemlich allemal $\frac{1}{x}$ anstatt x setzen ohne die Werthe derselben zu ändern. Es heißt sie deshalb ~~recipr~~ aequationes reciprocas. Ist eine solche Gl vom 4ten grade $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, so kann sie als ein Produkt von $x^2+\alpha x+1$ und $x^2+\beta x+1=0$ betrachtet werden. Denn das Produkt aus diesen Faktoren ist

$$x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta+2)x^2+(\alpha+\beta)x+1=0$$

vergleicht man dies mit der gegebenen, so wird $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta+2=b$, oder $\alpha\beta=b-2$.

* Um α und β zu finden braucht man aber nur $u^2-au+b-2=0$ aufzulösen

Ist sie vom sechsten Grade, so wird sie in drei, und wenn sie vom 8ten Grade ist, in 4ten ~~Factoren~~ Gl. und überhaupt in n solche Gl. aufgelöst wenn sie vom Grade $2n$ ist.

(nach (10) wenn man erstlich die Gleichung allgemein auflöst woraus sich α und β etc. finden werden)

§13. Da aber nun jede aequatio reciproca, wenn alle Glieder außer den äußern und dem mittelsten verschwinden, selbige sich in $x^{2n}+px^n+1$ verwandelt, ~~und~~ so wird auch diese in den Faktoren $x^2+\alpha x+1$, $x^2+\beta x+1$ etc. zerlegt werden können. α und β etc. werden aber hier durch die Gl. $y^n-ny^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}y^{n-4}$ etc. etc. $\pm p$ ~~(nach (9) wie hier $\beta=$ ...)~~ + p mit dem Zeichen + genommen werden muß wenn $n=2\nu$ aber $-p$ wenn $n=2\nu+1$. Man sieht aber die leichtere Rechnung dieser Art von Gl. aus der Moivreschen (9)

§15. Nach dieser Abschweifung kommt man wieder auf die Reihen zurück, und sehe, wie die resolvens beschaffen sein muß, wenn die Resolvenda beschaffen ist. Es sei daher die resolvens gegeben $z^3-\alpha z^2-\beta z+\gamma$, und A, B, C die Wurzeln derselben; so ist $A+B+C=\alpha$, $AB+AC+BC=\beta$ und $ABC=\gamma$; die Wurzel der resolvenda aber nach der Hypothese $x=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}$. Nun setze man $p=\sqrt[n]{AB}+\sqrt[n]{BC}+\sqrt[n]{AC}$, so wird $\sqrt[n]{A^2}+\sqrt[n]{B^2}+\sqrt[n]{C^2}=x^2-2p$ etc. und allgemein

$$\sqrt[n]{A^m}+\sqrt[n]{B^m}+\sqrt[n]{C^m}=x(\sqrt[n]{A^{m-1}}+\sqrt[n]{B^{m-1}}+\sqrt[n]{C^{m-1}})-p(\sqrt[n]{A^{m-2}}+\sqrt[n]{B^{m-2}}+\sqrt[n]{C^{m-2}})+\sqrt[n]{\gamma}(\sqrt[n]{A^{m-3}}+\sqrt[n]{B^{m-3}}+\sqrt[n]{C^{m-3}})$$

ferner $\sqrt[n]{A^mB^m}+\sqrt[n]{A^mC^m}$

$\sqrt[n]{B^m C^m} = \alpha(\sqrt[n]{A^{m-1}B^{m-1}} + \sqrt[n]{A^{m-1}C^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}C^{m-1}}) - \alpha\sqrt[n]{\gamma} \times$

4 $(\sqrt[n]{A^{m-2}B^{m-2}} + \sqrt[n]{A^{m-2}C^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}C^{m-2}}) + \sqrt[n]{\gamma^2}(A^{m-3}B^{m-3}$
$+ \sqrt[n]{A^{m-3}C^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}C^{m-3}})$

§16. Auch läßt sich folgende Eigenschaft bemerken.
wann $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m} = \mathfrak{A}$, $\sqrt[n]{A^m B^m} + \sqrt[n]{A^m C^m} + \sqrt[n]{B^m C^m} = \mathfrak{S}$ ist, so wird $\sqrt[n]{A^{2m}} + \sqrt[n]{B^{2m}} + \sqrt[n]{C^{2m}} = \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{S}$, und $\sqrt[n]{A^{2m}B^{2m}} + \sqrt[n]{A^{2m}C^{2m}} + \sqrt[n]{B^{2m}C^{2m}} = \mathfrak{S}^2 - 2\mathfrak{A}\sqrt[n]{\gamma^m}$ wo ~~da~~ eine ähnliche Reihe für die Potenz m bestimmt werden kann als die für die Potenz 1 ~~in~~ §15 bestimmt wird.

§17 Als Beispiel zu §15 sei n = 2, so wird α (aus $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$) $\alpha^2 - 2p$ und $\beta = p^2 - 2x\sqrt{\gamma}$. Sucht man p aus diesen 2 Gl. wegzuschaffen, so wird $\left(\frac{x^2-\alpha}{2}\right)^2 - 2x\sqrt{\gamma} = \beta$ oder $x^4 - 2\alpha x^2 - 8x\sqrt{\gamma} = 4\beta - \alpha^2$ eine solvenda, deren solvens $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$, und deren Wurzel $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ist. ~~wäre aber~~ hier ist x bekannt. Wäre ~~aber~~ oder $x^3 - 3px + 3\sqrt[3]{\gamma} = \alpha$, und $p^3 - 3px\sqrt[3]{\gamma} + 3\sqrt[3]{\gamma^2} = \beta$, so ließ sich x und p ~~aus~~ auch aus der allgemeinen Formel §15 bestimmen, es wäre $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}$, und $p = \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{AC} + \sqrt[3]{BC}$, ~~wo~~ wo A, B, C die Wurzeln der Gleichung $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ sind. ~~Allein man~~ Wollte man aber p herausschaffen, so käme man auch eine Gl. vom ~~...~~ neunten Grade, deren Wurzel also entwickelt bekannt ist.

§18. Wann daher eine Gleichung auf 2 Gl. von 2 unbekannten Größen führt, die unter die Formeln §15 gehören, so ist es besser sie, die man die unbekannten durch elimination auf eine zu bringen, da man die unbekannten Größen so finden kann. Es verursacht, daß dieses in vielen Fällen mit Vortheil geschehen könne.

§20 Man vermuthet es nun, daß wann $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$, daß durch irgend eines Gesetz (man weiß was ABCD bedeutet), daß durch irgend einen Kunstgriff die Gl. $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ gefunden werden können; doch räthe es α, β, γ, δ etc. auch ~~an~~ a, b, c, d aber die Unbekannten zu bestimmen, weil man beständig höhere Gl. bekommen würde als nothwendig ist.